数理解析研究所講究録
94巻 1970年 62-75

differential の加群と Serre の条件について

愛媛大 理　松岡 忠幸

§0. 序

R を perfect field k 上の reduced な locality とし $\Omega^1_{R/k}$ を R の k-differentials のなす R-module とする．このとき ring R の持つ性質と module $\Omega^1_{R/k}$ の性質が互いにどのように反映しあうであろうか．このことに関して今まで幾つかの考察がなされているが，その中の一つとしてよく知られているように Berger [3], 鈴木 [10], Lipman [6] 等によって次の結果が得られている．

「R が complete intersection のときには，R が normal であることと $\Omega^1_{R/k}$ が torsion free であることは同値である」

M.-P. Malliavin は，Serre の条件と，Auslander [9] によって導入された torsionless, reflexive などの概念の拡張である without q-torsion という概念とを使って上の結果の一般化を行った [7].

本講§1では，講演者の考察を加えながらこの Malliavin の結果（定理2）を紹介する．また§2では§1との関連において $\Omega^1_{R/k}$ のホモロジー次元の考察をし，R が complete intersection であることの特徴づけについての D. Ferrand の結果［5］の一つの証明をあたえる．

なお以下に述べる $\Omega^1_{R/k}$ についての殆んどの結果は，R の absolute differentials（すなわち素体上の differentials）のなす R-module Ω^1_R についても成り立つことを注意しておく．

以下記号 R，k，$\Omega^1_{R/k}$ 等は上述のものとし，一般の可換で単位元を持つ noetherian local ring を A であらわし，考える A-modules はすべて有限生成の unitary modules とする．さらに A の Krull 次元を dim A であらわし，A-module M について maximal M-sequence の長さを $\mathrm{depth}_A M$ で，また M のホモロジー次元を $hd_A M$ であらわすものとする．

§1. Serre の条件と Torsion

1° まず A-module M についての Serre の条件とこれに連がりのある定義を述べる．

__定義__. 整数 $q \geq 0$ について．

(i) $\mathrm{depth}_{A_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \geq \inf(q, \dim A_\mathfrak{p}) \quad \forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$

のときMはSerreの条件 (S_q) をみたすという。

(ii) $$\operatorname{depth}_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \geq \inf(q, \operatorname{depth} A_{\mathfrak{p}}) \qquad \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$$

のときMは条件 (a_q) をみたすという。

(iii) $\dim A_{\mathfrak{p}} \leq q$, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ なら $A_{\mathfrak{p}}$ がregularであるとき A は条件 (R_q) をみたすという。

すると次のSerreによるnormalityの判定条件はよく知られている。

「A がnormalである条件は A が条件 (S_2) と (R_1) をみたすことである」

また(ii)は次の意味をもつ。

命題1. MをA-moduleとするとき、

Mが条件 (a_q) をみたす $\Leftrightarrow$ 長さ $\leq q$ のA-sequenceはまたM-sequenceでもある。

これの証明はSamuel [8] のProp. 6の証明を修正すればよい。

A moduleが条件 (S_q) をみたせば当然条件 (a_q) をみたすが、我々の考えているmodule $\Omega^1_{R/k}$ について、もしこれのホモロジー次元が有限であれば、この逆も成り立つ。

命題2. $\operatorname{hd}_R \Omega^1_{R/k} < \infty$ のときには、この $\Omega^1_{R/k}$ について (S_q) と (a_q) は同値な条件である。

これの証明の鍵は、Rのregularityについての基本的性質

「Rがregular local ring $\Leftrightarrow$ $\Omega^1_{R/k}$ がfree R-module」

と次の Auslander-Buchsbaum [1] の結果である.

「A-module M について $hd_A M < \infty$ であれば

等式 $$hd_A M + \mathrm{depth}_A M = \mathrm{depth}\, A$$ が成り立つ」

命題２の証明: $(a_q) \Rightarrow (S_q)$ を示せばよい. $q \geq \dim R_{\mathfrak{p}}$ である $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ については, 当然 $q \geq \mathrm{depth}\, R_{\mathfrak{p}}$ であるから, $\mathrm{depth}_{R_{\mathfrak{p}}} \Omega_{\mathfrak{p}} \geq \mathrm{depth}\, R_{\mathfrak{p}}$ $(\Omega = \Omega^1_{R/k})$. したがって $hd_{R_{\mathfrak{p}}} \Omega_{\mathfrak{p}} = \mathrm{depth}\, R_{\mathfrak{p}} - \mathrm{depth}_{R_{\mathfrak{p}}} \Omega_{\mathfrak{p}} \leq 0$. ゆえに $\Omega_{\mathfrak{p}}$ は free $R_{\mathfrak{p}}$-module, すなわち $R_{\mathfrak{p}}$ は regular であるから $\dim R_{\mathfrak{p}} = \mathrm{depth}\, R_{\mathfrak{p}}$. また $q < \dim R_{\mathfrak{p}}$ となる $\mathfrak{p}$ にも上と同じ考察で $\mathrm{depth}\, R_{\mathfrak{p}} > q$ であることがわかる. 証明了

この命題２の証明と全く類似の方法で次の命題が得られる.

<u>命題３</u> ([4]). $hd_R \Omega^1_{R/k} < \infty$ のときには, $\Omega^1_{R/k}$ が条件 (S_q) をみたせば, R は条件 (S_{q+1}) と (R_q) をみたす.

2° M を A-module とし, M^* で M の dual $\mathrm{Hom}_A(M, A)$ をあらわす. A-modules の exact sequence

(1) $$F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

(F_0, F_1 は free A-modules) において,

(2) $$T_i(M) = \mathrm{Ext}^i_A(D(M), A) \qquad i \geq 1$$

$(D(M) = \mathrm{Coker}(F_0^* \longrightarrow F_1^*))$ を考える. すると

(2) $$0 \longrightarrow T_1(M) \longrightarrow M \xrightarrow{\theta} M^{**} \longrightarrow T_2(M) \longrightarrow 0$$

（θ は canonical map）が exact であり，また

(3) $$T_i(M) \simeq \mathrm{Ext}_A^{i-2}(M^*, A) \qquad i \geq 3$$

である［9］．したがって A-modules $T_i(M)$ は exact sequence (1) によらず M だけで定まる．

<u>定義</u>．$q \geq 1$ 整数とする．A-module M が $T_i(M) = 0$ $i = 1, \ldots, q$ のとき，without q-torsion であるという．

exact sequence (2) から

「M が without 1-torsion $\Leftrightarrow$ M が torsionless」，

「M が without 2-torsion $\Leftrightarrow$ M が reflexive」である．

torsionless module は free module の submodule であるが，$q \geq 2$ のとき M が without q-torsion とすると，exact sequence

$$G_{q-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow G_0 \longrightarrow M^* \longrightarrow 0$$

（$G_0, \ldots, G_{q-1}$ は free A-modules）の dual をとって得られる zero-sequence

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow G_0^* \longrightarrow \cdots \longrightarrow G_{q-1}^*$$

は，(3) より $\mathrm{Ext}_A^i(M^*, A) = 0$，$q-2 \geq i \geq 1$，であるから，exact である．したがって次の補題が成り立つ．

<u>補題 1.</u> M が without q-torsion なら，次のような exact sequence が作くれる．

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow F_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_{q-1}$$

こゝに $F_0, \cdots, F_{q-1}$ は free A-modules.

次に A-modules の exact sequence

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

について

$$\mathrm{depth}\, M_2 \geq \inf(\mathrm{depth}\, M_1, \mathrm{depth}\, M_3)$$

$$\mathrm{depth}\, M_1 \geq \inf(\mathrm{depth}\, M_2, \mathrm{depth}\, M_3 + 1)$$

$$\mathrm{depth}\, M_3 \geq \inf(\mathrm{depth}\, M_2, \mathrm{depth}\, M_1 - 1)$$

が成り立つことから

補題2. A-modules の exact sequence

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

で，L が free のときには，N が条件 (a_{q-1}) をみたせば M は条件 (a_q) をみたす.

がわかる．これらの補題より q についての帰納法を使えば次の命題が得られる.

命題4. A-module が without q-torsion なら，それは条件 (a_q) をみたす.

さて一般に A が reduced のときには A-module が torsion free であることと torsionless であることは同値であるから，命題2, 3 および 4 より differentials の module $\Omega^1_{R/k}$ について次の定理が得られる.

定理 1. $hd_R \Omega^1_{R/k} < \infty$ のときには，$\Omega^1_{R/k}$ が without q-torsion ならRは条件 (S_{q+1}) と (R_q) をみたす．したがって特に $\Omega^1_{R/k}$ が torsion free ならRは normal である．

問題．上の定理で仮定 $hd_R \Omega^1_{R/k} < \infty$ を除くことが出来ないか．これは $q=1$，$\dim R = 1$ のときでさえ判っていないようである．

次に定理 1 の逆について考える．そのために

補題 3 (Serre). MをA-module とするとき，$hd_A M \leq 1$ なら，

$$M \text{ が free } \Leftrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M, A) = 0$$

証明は，$\Rightarrow$ は明らかであるから $\Leftarrow$ を示せばよい．Mの free resolution を

$$0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

とすると，$\mathrm{Ext}^1_A(M, F_1) = 0$．これは F_1 のMによる拡大が分解拡大だけであることを示しているからMは F_0 の direct summand．ゆえにMは free である．

この補題を使うと，Rが complete intersection のときには $hd_R \Omega^1_{R/k} \leq 1$ （§2を参照）であるから，

$$\mathrm{Supp}\, \mathrm{Ext}^1_R(\Omega^1_{R/k}, R) \not\ni \mathfrak{p} \Leftrightarrow R_{\mathfrak{p}} \text{ が regular },$$

であることがわかる．

これより Berger－鈴木－Lipman の結果の一般化として次の定理がわかる．

<u>定理 2 (Malliavin).</u>　R が complete intersection のときには次の条件は同値である.

(i)　R が条件 (R_g) をみたす

(ii)　$\Omega^1_{R/k}$ が without g-torsion である

(iii)　$\Omega^1_{R/k}$ が条件 (S_g) をみたす

(iv)　長さ $\leq g$ の R-sequence はまた $\Omega^1_{R/k}$-sequence でもある

証明は今までの考察から (i) $\Rightarrow$ (ii) を示めせばよい.
いま (i) であるとすれば, R が Macaulay ring であることに注意すると, $\operatorname{Supp} \operatorname{Ext}^1_R(\Omega^1_{R/k}, R) \ni \mathfrak{p} \Rightarrow \operatorname{depth} R_{\mathfrak{p}} \geq g+1$.
ゆえに

$$\begin{aligned} &\operatorname{grade} \operatorname{Ext}^1_R(\Omega^1_{R/k}, R) \\ &\geq \inf\{\operatorname{depth} R_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} \operatorname{Ext}^1_R(\Omega^1_{R/k}, R)\} \\ &\geq g+1 \end{aligned}$$

したがって　$\operatorname{Ext}^i_R(\operatorname{Ext}^1_R(\Omega^1_{R/k}, R), R) = 0 \qquad 0 \leq i \leq g$.
一方　$\operatorname{hd}_R \Omega^1_{R/k} \leq 1$ から

$$T_i(\Omega^1_{R/k}) = \operatorname{Ext}^i_R(\operatorname{Ext}^1_R(\Omega^1_{R/k}, R), R) \qquad i \geq 1$$

であるから, $\Omega^1_{R/k}$ は without g-torsion である.　証明了

<u>附記.</u>　最近 U. Vetter は [12] で定理 2 の条件 (i) は次の各々の条件と同値であることを示めした.

(v)　$\Omega^i_{R/k}$ $(= \bigwedge^i \Omega^1_{R/k})$ $i = 1, \cdots, g$ が torsion free

(vi)　$\Omega^i_{R/k}$ $i = 1, \cdots, g-1$ が reflexive $(g \geq 2)$

§2. $\Omega^1_{R/k}$ のホモロジー次元

A-module M の minimal generators の箇数を $r(M)$ であらわす。いま $\mathfrak{m}$ を R の maximal ideal とすれば

$$(1) \quad r(\Omega^1_{R_\mathfrak{p}/k}) = r(\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}) + \dim(R/\mathfrak{p}) + \mathrm{tr.d.}_k(R/\mathfrak{m})$$
$$\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$$

である。実際 $\tilde{R} = R_\mathfrak{p}$, $\tilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ とおくと，k が perfect だから $\tilde{R}/\tilde{\mathfrak{p}}$ は k 上 separable. したがって

$$0 \to \tilde{\mathfrak{p}}/\tilde{\mathfrak{p}}^2 \to (\tilde{R}/\tilde{\mathfrak{p}}) \otimes_{\tilde{R}} \Omega^1_{\tilde{R}/k} \to \Omega^1_{(\tilde{R}/\tilde{\mathfrak{p}})/k} \to 0$$

が exact sequence. これから (1) が得られる.

特に

$$(2) \qquad r(\Omega^1_{R/k}) = r(\mathfrak{m}) + \mathrm{tr.d.}_k(R/\mathfrak{m})$$

であり，また

$$(3) \quad r(\Omega^1_{R_\mathfrak{p}/k}) \leq \dim R + \mathrm{tr.d.}_k(R/\mathfrak{m}), \quad \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)$$

こゝで少くとも一つの $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)$ について等号が成り立つ.

いま $\Omega^1_{R/k}$ の minimal free resolution を

$$(*) \qquad \cdots \to L_i \to \cdots \to L_0 \to \Omega^1_{R/k} \to 0$$

とする。すなわち上の sequence が exact で L_i は free で $\mathrm{Im}(L_{i+1} \to L_i) \subseteq \mathfrak{m}L_i$. $N_i = \mathrm{Im}(L_{i+1} \to L_i)$ とおくと $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)$ について $R_\mathfrak{p}$-vector spaces の exact sequence

$$0 \longrightarrow (N_n)_{\mathfrak{p}} \longrightarrow (L_n)_{\mathfrak{p}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow (L_0)_{\mathfrak{p}} \longrightarrow \Omega^1_{R_{\mathfrak{p}}/k} \longrightarrow 0$$

が出来るから，次の等式が得られる．

$$(4) \quad \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} r(L_i) = r(L_0) - r(\Omega^1_{R_{\mathfrak{p}}/k}) + (-1)^{n-1} r((N_n)_{\mathfrak{p}})$$
$$\mathfrak{p} \in Ass(R)$$

__補題 1.__ M を torsion free A-module とすると，

$M_{\mathfrak{p}} = 0 \quad {}^{\forall}\mathfrak{p} \in Ass(A) \Rightarrow M = 0$

証明は容易である．

次の定理は [13] の結果の一般化である．

__定理 1.__ 任意の奇数 n について不等式

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} r(Tor_i^R(\Omega^1_{R/k}, R/\mathfrak{m})) \geq r(\mathfrak{m}) - \dim R$$

が成り立つ．またある奇数 n について上の不等式が等式となる必十条件は $hd_R\, \Omega^1_{R/k} \leq n$ である．

証明の概略： (*) が minimal free resolution であるから

$$r(L_i) = r(Tor_i^R(\Omega^1_{R/k}, R/\mathfrak{m}))$$
$$r(L_0) = r(\Omega^1_{R/k}) .$$

これと (2), (3) および (4) から前半はわかる．後半は (4) と補題 1 から得られる．

特に $n = 1$ とすれば [13] の結果が得られる． すなわち，

<u>系.</u> 不等式 $r(\mathrm{Tor}_1^R(\Omega^1_{R/k}, R/\mathfrak{m})) \geq r(\mathfrak{m}) - \dim R$ が成り立ち，等号となる条件は $hd_R \Omega^1_{R/k} \leq 1$.

R が complete intersection のときには $hd_R \Omega^1_{R/k} \leq 1$ であることが，Macaulay ring の性質から比較的容易に示められる．また逆も成り立つことが D. Ferrand によって証明された [5]. これの証明はあまり知られていないようなので，以下 上の系を使った一つの証明を与たえる．

<u>定理 2.</u> $\mathfrak{a}$ を A の ideal で $hd_A \mathfrak{a} < \infty$ とする．$ht\,\mathfrak{a} = r$ （$ht\,\mathfrak{a}$ は ideal $\mathfrak{a}$ の height）として，$A/\mathfrak{a}$-module の homomorphism $\Phi : \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \longrightarrow (A/\mathfrak{a})^r$ が surjection であれば，Φ は isomorphism である．

この定理の証明の鍵は次の Auslander - Buschbaum [2] の結果にある．「$\mathfrak{a} \neq 0$ のとき，$hd_A \mathfrak{a} < \infty$ であれば $\mathfrak{a}$ は non zero - divisor を含む」

以下に述べる証明の概要は Kaplansky の手法によるもので，細部については Vasconcelos [11] の Theorem 1.1 の証明に使われる幾つかの Lemmas を見られたい．

r についての帰納法．$r = 0$ のときは上述の Auslander - Buschbaum の結果から $\mathfrak{a} = 0$ であるから正しい． $r > 0$ のときには，$\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{a}^2$ である ideal $\mathfrak{b}$ で $\mathfrak{a}/\mathfrak{b} \simeq (A/\mathfrak{a})^r$ となるものがとれ，$\mathfrak{a} = \sum_{i=1}^r Af_i + \mathfrak{b}$, $\bar{f}_1, \cdots, \bar{f}_r$ は $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ の

free base (こゝに $\bar{f}_i$ は f_i の mod $\mathfrak{b}$ での class) とあらわされる. こゝで $\mathfrak{a}$ が non zero-divisor を含むことから f_1 として non zero-divisor がとれることが証明出来る. $\tilde{A} = A/Af_1$ として $\tilde{A}$ の ideals や elements には ~ を付けて書くことにすれば, $ht\,\tilde{\mathfrak{a}} = r-1$ ($\tilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}/Af_1$) であり $\tilde{\mathfrak{a}} = \sum_{i=2}^{r} \tilde{A}\tilde{f}_i + \tilde{\mathfrak{b}}$, $\tilde{\mathfrak{a}}/\tilde{\mathfrak{b}} \simeq (\tilde{A}/\tilde{\mathfrak{a}})^{r-1}$ で, Φ から induce された map $\tilde{\Phi} : \tilde{\mathfrak{a}}/\tilde{\mathfrak{a}}^2 \longrightarrow (\tilde{A}/\tilde{\mathfrak{a}})^{r-1}$ は surjection である. また $\mathfrak{a}/f_1\mathfrak{a} \simeq (Af_1/f_1\mathfrak{a}) \oplus (\mathfrak{a}/Af_1)$ (直和) が成り立つことと, $hd_{A/Af_1}(\mathfrak{a}/f_1\mathfrak{a}) = hd_A\,\mathfrak{a}$ であることから $hd_{\tilde{A}}\,\tilde{\mathfrak{a}} < \infty$ がわかる. よって帰納法の仮定から $\tilde{\Phi}$ は isomorphism. これと次の可換図型から目的である Φ が isomorphism であることがわかる.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & (\mathfrak{a}^2+Af_1)/\mathfrak{a}^2 & \longrightarrow & \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 & \longrightarrow & \tilde{\mathfrak{a}}/\tilde{\mathfrak{a}}^2 & \longrightarrow & 0 \quad (\text{exact}) \\
 & & \downarrow & & \downarrow \Phi & & \downarrow \tilde{\Phi} & & \\
0 & \longrightarrow & A/\mathfrak{a} & \longrightarrow & (A/\mathfrak{a})^r & \longrightarrow & (\tilde{A}/\tilde{\mathfrak{a}})^{r-1} & \longrightarrow & 0 \quad (\text{exact})
\end{array}
$$

<u>定理 3</u>. ([5], [13]) 次の三条件は同値である.

(i) R が complete intersection

(ii) $hd_R\,\Omega^1_{R/k} \leq 1$

(iii) $r(\mathrm{Tor}^R_1(\Omega^1_{R/k}, R/\mathfrak{m})) = r(\mathfrak{m}) - \dim R$

証明．(i) ⇒ (iii) および (ii) ⇒ (i) を示せばよい．$R = S/\mathfrak{a}$，S は regular な k 上の locality，とあらわしておくと，$\mathfrak{n}$ を S の maximal ideal として $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{n}^2$ としてよい．そこで exact sequence

$$\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \xrightarrow{\delta} R \otimes_S \Omega^1_{S/k} \longrightarrow \Omega^1_{R/k} \longrightarrow 0$$

において $N = \mathrm{Im}(\delta)$ とすれば，$N \subseteq \mathfrak{m}(R \otimes_S \Omega^1_{S/k})$．これから $\mathrm{Tor}^R_1(\Omega^1_{R/k}, R/\mathfrak{m}) \simeq N/\mathfrak{m}N$．したがって $r(\mathrm{Tor}^R_1(\Omega^1_{R/k}, R/\mathfrak{m})) = r(N)$．また $\dim S = r(\mathfrak{m})$ であるから $r(\mathfrak{m}) - \dim R = ht\,\mathfrak{a}$．よって定理1の系より $r(N) \geq ht\,\mathfrak{a}$ であり，条件 (iii) は

(iii)′ $\qquad r(N) = ht\,\mathfrak{a}$

といいかえられる．いま (i) とすれば，$\mathfrak{a}$ は S-sequence で生成され，その S-sequence の長さは丁度 $ht\,\mathfrak{a}$ であるから (iii)′ が得られる．次に (ii) とすれば N は free であり，しかも定理1の系から (ii) ⇔ (iii)′ がわかっているから $r(N) = ht\,\mathfrak{a}$ より定理2を使って δ は isomorphism．ゆえに $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ は free．したがって $\mathfrak{a}$ は S-sequence で生成される．

証明了

文 献

[1] Auslander, M. and D. A. Buschbaum, Homological dimension in local rings, Trans. Amer. Math. Soc. 85, (1957) 390-405

[2] ________, Codimension and multiplicity, Ann. Math. 68, (1958) 625-657

[3] Berger, R., Differentialmoduln eindimensionaler lokaler Ringe, Math. Zeit. 81, (1963) 326-354

[4] Berger, R., R. Kiehl, E. Kunz und H.-J. Nastold, Differentialrechnung in der analytischen Geometrie, Springer lecture notes in math. 38 (1967)

[5] Ferrand, D., Suite regulière et intersection complète, C. R. Acad. Sc. Paris 246, (1967) 427-428

[6] Lipman, J., Free derivation modules on algebraic varieties, Amer. J. Math. 87, (1965) 874-898

[7] Malliavin, M.-P., Condition (a_q) de Samuel et q-torsion, Bull. Soc. math. France 96, (1968) 193-196

[8] Samuel, P., Anneaux gradués factoriels et modules reflexifs, Bull. Soc. math. France 92, (1964) 237-249

[9] Séminaire Samuel, 1966/67 Algèbre commutative : Anneaux de Gorenstein et torsion en algèble commutative, Secrét. math. Paris (1967)

[10] Suzuki, S., On torsion of the module of differentials of a locality which is a complete intersection, J. Math. Kyoto Univ. 4, (1965) 471-475

[11] Vasconcelos, W. V., Ideals generated by R-sequences, J. Algebra 6, (1967) 309-316

[12] Vetter, U., Äusser Potenzen von Differentialmoduln reduzierter vollständiger Durchschnitte, manuscripta math. 2, (1970) 67-75

[13] Matsuoka, T., Complete intersection の特徴づけについて, 数学 21, (1969) 217-218